

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009

Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

I. Fie ecuația: $z^2 + a|z| + b = 0$ cu necunoscuta $z \in \mathbb{C}$, iar $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Determinați a și b astfel încât $z_1 = 1$ și $z_2 = 2$ să fie rădăcini ale ecuației date.
- b) Cu a și b determinați la punctul a), rezolvați ecuația obținută.

II. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care satisface condiția:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in (0, \infty).$$

- a) Demonstrați că $f(1) = 0$ și $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x), \forall x \in (0, \infty)$.
- b) Folosind metoda inducției matematice demonstrați că $f(x^n) = n \cdot f(x), \forall x \in (0, \infty)$ și $n \in \mathbb{N}$.
- c) Arătați că $f(x^m) = m \cdot f(x), \forall x \in (0, \infty)$ și $m \in \mathbb{Z}$.

III. Fie dreptele:

$(d_1): x - y + 1 = 0$; $(d_2): \alpha x - (\alpha - 1)y - 1 = 0$; $(d_3): (\alpha - 2)x - (\alpha - 3)y - 1 = 0$, unde α este un parametru real.

Demonstrați că:

- a) Cele trei drepte nu sunt concurente.
- b) Cele trei drepte nu sunt paralele două câte două.
- c) Aria triunghiului determinat de cele trei drepte nu depinde de α .

IV. O foaie de hârtie de formă pătrată se taie după o dreaptă în două bucăți. Una dintre bucățile obținute se taie din nou în două și se procedează așa de mai multe ori.

- a) Câte bucăți se obțin după n tăieturi?
- b) Demonstrați că după fiecare tăietură numărul total al vârfurilor tuturor bucăților crește cu 2 sau cu 3 sau cu 4.
- c) Care este numărul maxim de vârfuri ale tuturor bucăților după n tăieturi?
- d) Care este numărul minim de tăieturi care trebuie efectuate astfel încât printre bucățile obținute să fie 10 poligoane cu câte 15 laturi?

Indicați un mod de a obține 10 poligoane cu câte 15 laturi făcându-se un număr minim de tăieturi.

Nota: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.